Übungsaufgaben

2. Ein Lichtstrahl trifft aus der Luft kommend im 45° Winkel auf eine ideal glatte Wasseroberfläche. Der Brechungsindex von Luft beträgt $n_L = 1{,}00$, der Brechungsindex von Wasser beträgt $n_W = 1{,}33$.

a) Wie groß ist der Reflexionswinkel?

b) Wie groß ist der Brechungswinkel?

c) Welcher Intensitätsanteil wird reflektiert und absorbiert/transmittiert?

Lösung

Ein Lichtstrahl trifft aus der Luft kommend im 45° Winkel auf eine ideal glatte Wasseroberfläche. Der Brechungsindex von Luft beträgt $\boldsymbol{n_L = 1{,}00}$, der Brechungsindex von Wasser beträgt $\boldsymbol{n_W = 1{,}33}$.

a) Wie groß ist der Reflexionswinkel?

Da es sich um eine ideal glatte (damit ideal reflektierende) Oberfläche handelt, entspricht der gesuchte Reflexionswinkel β dem Einfallswinkel α: $\beta = \alpha = 45°$.

b) Wie groß ist der Brechungswinkel?

Der Brechungswinkel berechnet sich aus dem Verhältnis der beiden Brechungsindizes und dem Einfallswinkel:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_W}{n_L} \quad \Rightarrow \sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{\frac{n_W}{n_L}} = \frac{\sin\alpha \quad \cdot n_L}{n_W}$$

$$\sin\gamma = \frac{0{,}7071 \cdot 1}{1{,}33} = 0{,}5317 \Rightarrow \gamma = \arcsin 0{,}5317 = \boldsymbol{32{,}12}°$$

Lösung (2)

c) Welcher Intensitätsanteil wird reflektiert und absorbiert/transmittiert?

Der reflektierte Intensitätsanteil wird über die Formel zum Fresnel-Effekt bestimmt:

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2(\gamma - \alpha)}{\sin^2(\gamma + \alpha)} + \frac{\tan^2(\gamma - \alpha)}{\tan^2(\gamma + \alpha)}\right)$$

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2(32{,}12° - 45°)}{\sin^2(32{,}12° + 45°)} + \frac{\tan^2(32{,}12° - 45°)}{\tan^2(32{,}12° + 45°)}\right)$$

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2(-12{,}88°)}{\sin^2(77{,}12°)} + \frac{\tan^2(-12{,}88°)}{\tan^2(77{,}12°)}\right)$$

$$R = \frac{1}{2}(0{,}0523 + 0{,}0027) = \mathbf{0{,}0275}$$

D.h. etwa 2,75% der einfallenden Intensität wird reflektiert. Aufgrund der Energieerhaltung wird der restliche Anteil absorbiert bzw. transmittiert: $A = 100\% - 2{,}75\% = 97{,}25\%$.

Übungsaufgaben

3. Bei achromatischem Licht (Nur Betrachtung der Intensitäten) ist eine Lichtquelle an der Stelle $L = (10|\ 5|10)$ gegeben. Diese hat die Quellintensität $I_{in} = 10$. Ein Betrachter befindet sich im Punkt $A = (0|5|10)$. Das Licht fällt auf ein Dreieck mit den Vertices $v_0 = (5|0|5)$, $v_1 = (10|1|5)$, $v_2 = (8|2|0)$. Dieses hat die Materialeigenschaften $k_a = 0{,}3$, $k_d = 0{,}3$ und $k_s = 1$, sowie $s = 2$. Berechnen Sie die Lichtintensität die beim Betrachter A für den Vertex v_0 ankommt nach dem Phong Reflexionsmodell. Gehen Sie von einem Ambiente-Licht $I_a = 3$ aus. Nutzen Sie die Flächennormale.

Lösung

3. Bei achromatischem Licht (Nur Betrachtung der Intensitäten) ist eine Lichtquelle an der Stelle $\boldsymbol{L = (10|\ 5|10)}$ gegeben. Diese hat die Quellintensität $\boldsymbol{I_{in} = 10}$. Ein Betrachter befindet sich im Punkt $\boldsymbol{A = (0|5|10)}$. Das Licht fällt auf ein Dreieck mit den Vertices $\boldsymbol{v_0 = (5|0|5)}$, $\boldsymbol{v_1 = (10|1|5)}$, $\boldsymbol{v_2 = (8|2|0)}$. Dieses hat die Materialeigenschaften $\boldsymbol{k_a = 0,3}$, $\boldsymbol{k_d = 0,3}$ und $\boldsymbol{k_s = 1}$, sowie $\boldsymbol{s = 2}$. Berechnen Sie die Lichtintensität die beim Betrachter $\boldsymbol{A}$ für den Vertex $\boldsymbol{v_0}$ ankommt nach dem Phong Reflexionsmodell. Gehen Sie von einem Ambiente-Licht $\boldsymbol{I_a = 3}$ aus. Nutzen Sie die Flächennormale.

Betrachte die Beleuchtungsformel von Phong

$$I = I_a k_a + I_{in}(k_d\,(l \cdot n) + k_s(ra)^S)$$

$I_a, k_a, I_{in}, k_d, k_s$ und s sind gegeben. Wir benötigen die Vektoren l, n, r und a.

1. Berechnen des Vektors l und Normalisierung des Vektors:

$$l = L - v_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$l' = \frac{l}{\sqrt{{l_x}^2 + {l_y}^2 + {l_z}^2}} = \frac{l}{\sqrt{75}} = \begin{pmatrix} 5/8{,}66 \\ 5/8{,}66 \\ 5/8{,}66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}58 \\ 0{,}58 \\ 0{,}58 \end{pmatrix}$$

Lösung (2)

2. Berechnen des Normalenvektors des Dreiecks:

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,x} - v_{0,x} \\ v_{1,y} - v_{0,y} \\ v_{1,z} - v_{0,z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_{2,x} - v_{0,x} \\ v_{2,y} - v_{0,y} \\ v_{2,z} - v_{0,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-5 \\ 1-0 \\ 5-5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8-5 \\ 2-0 \\ 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-5) - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 - 5 \cdot (-5) \\ 5 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 25 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Anmerkung zur Reihenfolge der Vertices im Kreuzprodukt:

- Der Winkel zwischen n und l muss $\leq 90°$ sein, siehe Folien: max Bedingung.
- Testen kann man dies durch Berechnung von $\arccos(l \cdot n)$, hier 54°.
- Ist der Winkel $> 90°$ zeigt die Normale des Dreiecks in entgegengesetzter Richtung, das Licht würde auf die Rückseite des Dreiecks fallen

Erinnerung: Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Normalisierung der Normalen:

$$n' = \frac{n}{\sqrt{{n_x}^2 + {n_y}^2 + {n_z}^2}} = \frac{n}{\sqrt{25 + 625 + 49}} = \begin{pmatrix} -5/26{,}44 \\ 25/26{,}44 \\ 7/26{,}44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}19 \\ 0{,}95 \\ 0{,}26 \end{pmatrix}$$

Lösung (3)

3. Berechnen des Vektors a und Normalisierung des Vektors:

$$a = A - v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$a' = \frac{a}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}} = \frac{a}{\sqrt{75}} = \begin{pmatrix} -5/8{,}66 \\ 5/8{,}66 \\ 5/8{,}66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}58 \\ 0{,}58 \\ 0{,}58 \end{pmatrix}$$

Erinnerung: Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

4. Berechnung des Vektors r:

$$r = 2(l' \cdot n') \cdot n' - l'$$

$$r = 2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 0{,}58 \\ 0{,}58 \\ 0{,}58 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}19 \\ 0{,}95 \\ 0{,}26 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -0{,}19 \\ 0{,}95 \\ 0{,}26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}58 \\ 0{,}58 \\ 0{,}58 \end{pmatrix}$$

$$r = 2 \cdot (0{,}58 \cdot (-0{,}19) + 0{,}58 \cdot 0{,}95 + 0{,}58 \cdot 0{,}26) \cdot \begin{pmatrix} -0{,}19 \\ 0{,}95 \\ 0{,}26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}58 \\ 0{,}58 \\ 0{,}58 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot 0{,}59 \cdot \begin{pmatrix} -0{,}19 \\ 0{,}95 \\ 0{,}26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}58 \\ 0{,}58 \\ 0{,}58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}22 \\ 1{,}12 \\ 0{,}31 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}58 \\ 0{,}58 \\ 0{,}58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}80 \\ 0{,}54 \\ -0{,}27 \end{pmatrix}$$

r ist bereits normalisiert, da wir ihn aus normalisierten Vektoren berechnet haben .

Lösung (4)

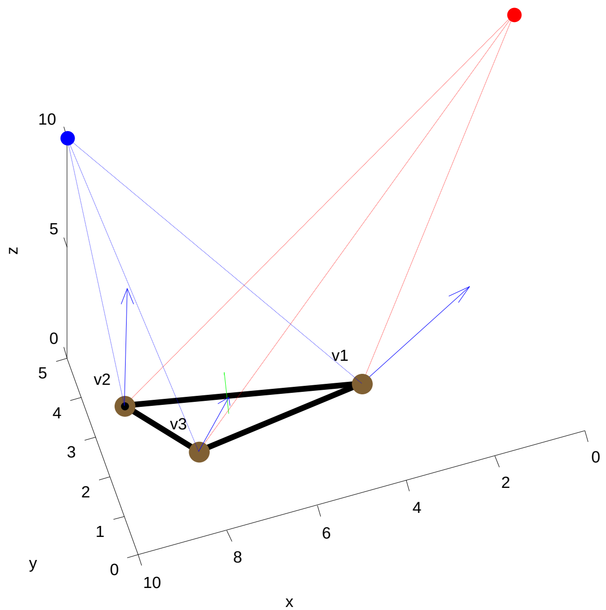
5. Beleuchtungsberechnung

$$I = I_a k_a + I_{in}(k_d\ (l \cdot N) + k_s (ra)^S)$$

$$I = 3 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot \left(0{,}3 \cdot \left(\begin{pmatrix} 0{,}58 \\ 0{,}58 \\ 0{,}58 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}19 \\ 0{,}95 \\ 0{,}26 \end{pmatrix} \right) + 1 \cdot \left(\begin{pmatrix} -0{,}80 \\ 0{,}54 \\ -0{,}27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}58 \\ 0{,}58 \\ 0{,}58 \end{pmatrix} \right)^2 \right)$$

$$I = 3 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot (0{,}3 \cdot 0{,}59 + 1 \cdot 0{,}62^2)$$

$$I = 6{,}51$$



Anmerkung zur Reihenfolge der Vertices im Kreuzprodukt bei Normalenberechnung:

- Eine Normale in die Falsche Richtung würde hier einen negativen Wert für die diffuse Beleuchtungskomponente zur Folge haben, die nicht erlaubt ist!