Übungsaufgaben

Bezierkurven, B-Splines, NURBS

1. Es soll ein B-Spline vom Polynomgrad 3 für 7 Stützpunkte gezeichnet werden. Der erste und letzte Stützpunkt sollen interpoliert werden. Geben Sie einen uniformen Knotenvektor an, wobei $t \in [0\ 1]$.
2. Eine Bézierkurve soll die 3 Stützpunkte $v_0 = (1{,}5)$, $v_1 = (4{,}6)$ und $v_2 = (2{,}10)$ verbinden. Welchen Grad muss das Bernsteinpolynom haben? Skizzieren sie den Kurvenverlauf!
3. Wie würde ein B-Spline zweiten Grades ($k = 2$) mit Knotenvektor $[0, 0, 0, {}^1/_3\,, {}^2/_3\,, 1]$ die Punkte approximieren? Skizzieren sie den Kurvenverlauf!
4. Gegeben sind erneut die 3 Stützpunkte $v_0 = (1{,}5)$, $v_1 = (4{,}6)$ und $v_2 = (2{,}10)$, die mit einem B-Spline approximiert werden sollen. Der Grad des B-Splines soll 2 sein, der Knotenvektor uniform $[0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5]$. Geben Sie den Startpunkt P des B-Splines an.

Lösung

1. Es soll ein B-Spline vom Polynomgrad 3 für 7 Stützpunkte gezeichnet werden. Der erste und letzte Stützpunkt sollen interpoliert werden. Geben Sie einen uniformen Knotenvektor an, wobei $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}\ \mathbf{1}]$.

Polynomgrad = 3 → $k = 3$

Anzahl der Stützpunkte = 7 → $n = 7$

Anzahl der Knoten im Knotenvektor = $n + k + 1$ → $n + k + 1 = 11$

Erster und letzter Punkt sollen interpoliert werden → Knotenvektor ist offen zu wählen, d.h. k Wiederholungen des ersten und letzten Elementes

Uniformer Knotenvektor: d.h. äquidistante Verteilung der inneren Knoten.

Resultierender Knotenvektor:

[0, 0, 0, 0, ¼, ½, ¾, 1 1 1 1]

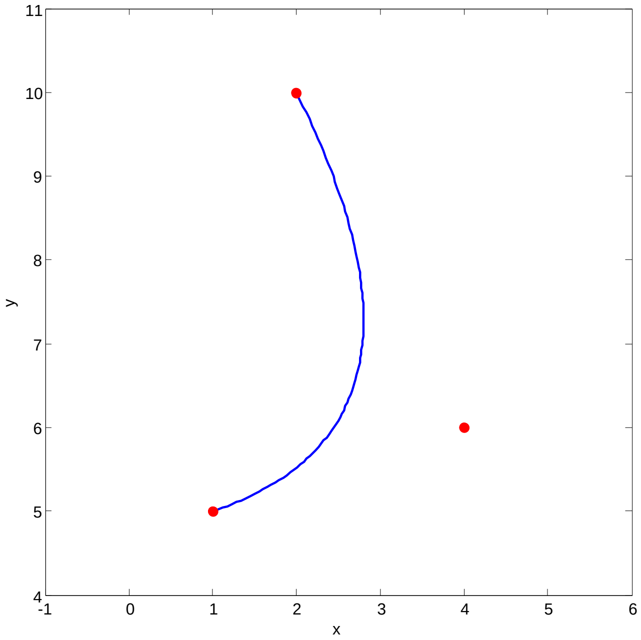
Lösung (2)

2. Eine Bézierkurve soll die 3 Stützpunkte $v_0 = (1, 5)$, $v_1 = (4, 6)$ und $v_2 = (2, 10)$ verbinden. Welchen Grad muss das Bernsteinpolynom haben? Skizzieren sie den Kurvenverlauf!

Das Bernsteinpolynom hat Grad $n = 2$, da $n + 1 = 3$ Stützpunkte verbunden werden sollen.

Skizze des Kurvenverlaufs:

- Interpolation des ersten und letzten Punktes
- Kurve gekrümmt zum zweiten Punkt hingezogen.

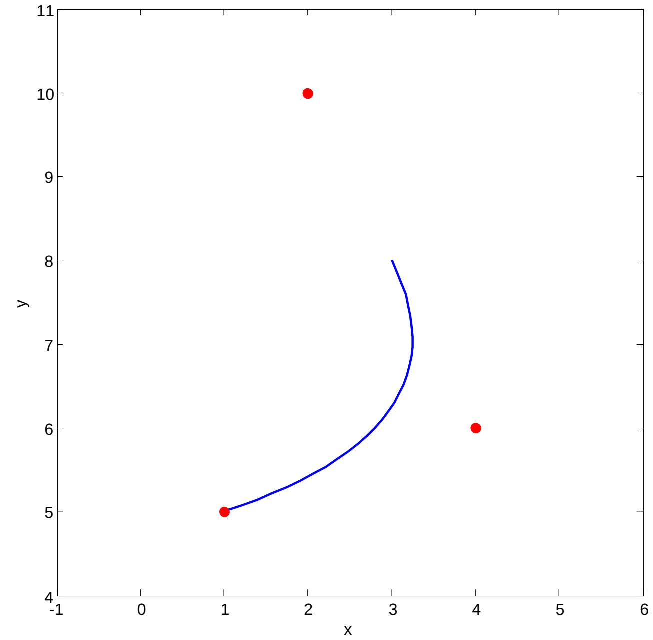


Lösung (3)

3. Wie würde ein B-Spline zweiten Grades ($k = 2$) mit Knotenvektor $[0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1]$ die Punkte approximieren? Skizzieren sie den Kurvenverlauf!

Skizzieren des Kurvenverlaufs

- Erster Punkt wird interpoliert, da das erste Elements im Knotenvektor 3 mal Auftritt (k Wiederholungen, offener Knotenvektor).
- Letzter Punkt wird nur approximiert, Kurve endet bereits zwischen dem zweiten und dritten Stützpunkt auf halber Strecke, da die Knoten uniform verteilt sind.



Lösung (4)

4. Gegeben sind erneut die 3 Stützpunkte $\boldsymbol{v_0 = (1, 5)}$, $\boldsymbol{v_1 = (4, 6)}$ und $\boldsymbol{v_2 = (2, 10)}$, die mit einem B-Spline approximiert werden sollen. Der Grad des B-Splines soll 2 sein, der Knotenvektor uniform $\boldsymbol{[0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5]}$. Geben Sie den Startpunkt $\boldsymbol{P}$ des B-Splines an.

Der B-Spline ist gültig für den Bereich k bis n (d.h. dort wo mindestens $k + 1$ Kurven ungleich 0 sind, vergleiche Plot in den Folien). Bei gegebenem $k = 2$ und Knotenvektor entspricht dies dem Bereich zwischen $x_k = x_2 = 2$ und $x_n = x_3 = 3$ des Knotenvektors. Der Startpunkt befindet sich also bei $t = 2$, der Endpunkt bei $t = 3$.

Nun wird die Cox-De-Boor Rekursion durchgeführt. Entsprechend der Formel für eine B-Spline-Kurve

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot N_{i,k}(t)$$

müssen wir für alle $i = 0 \ldots 2$ die Werte der B-Spline Basisfunktion $N_{0,2}$, $N_{1,2}$, $N_{1,2}$ berechnen. Diese ergeben sich aus der Rekursion. Geschickterweise beginnt man daher in der untersten Hierarchieebene der Rekursion für $k = 0$. Man setzt in die Gleichung die entsprechenden Werte für t, i und k ein. Wir beginnen bei $i = 0$ und $k = 0$:

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x_i \leq t < x_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{0,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \Longrightarrow N_{0,0}(2) = 0$$

Lösung (5)

Da im Rekursionsaufruf einmal auf $N_{i+1,k-1}$ zugegriffen wird und von $k = 2$ bis $k = 0$ zwei Rekursionsaufrufe erfolgen, muss bis $N_{4,0}(2)$ berechnet werden.

Für die unterste Hierarchieebene der Rekursion ergibt sich:

$N_{0,0}(2) = 0 \quad N_{1,0}(2) = 0 \quad N_{2,0}(2) = 1 \quad N_{3,0}(2) = 0 \quad N_{4,0}(2) = 0$

Wir fahren auf der nächsten Rekursionsstufe fort, Beispiel: für $i = 1, k = 1$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - x_i}{x_{i+k} - x_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{x_{i+k+1} - t}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

$$N_{1,1}(t) = \frac{t - x_1}{x_2 - x_1} N_{1,0}(t) + \frac{x_3 - t}{x_3 - x_2} N_{2,0}(t)$$

$$N_{1,1}(2) = \frac{2 - 1}{2 - 1} \cdot 0 + \frac{3 - 2}{3 - 2} \cdot 1 = 1$$

Die zweite Hierarchieebene baut sich somit wie folgt auf:

$N_{0,0}(2) = 0 \quad N_{1,0}(2) = 0 \quad N_{2,0}(2) = 1 \quad N_{3,0}(2) = 0 \quad N_{4,0}(2) = 0$

$N_{0,1}(2) = 0 \quad N_{1,1}(2) = 1 \quad N_{2,1}(2) = 0 \quad N_{3,1}(2) = 0$

Lösung (6)

Entsprechend wird die dritte Hierarchieebene berechnet (damit $k = 2$ – der Grad der B-Spline-Basis-Funktion ist erreicht. Ende der Rekursion), Beispiel für $i = 0$:

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - x_i}{x_{i+k} - x_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{x_{i+k+1} - t}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

$$N_{0,2}(t) = \frac{t - x_0}{x_2 - x_0} N_{0,1}(t) + \frac{x_3 - t}{x_3 - x_1} N_{1,1}(t)$$

$$N_{0,2}(2) = \frac{2 - 0}{2 - 1} \cdot 0 + \frac{3 - 2}{3 - 1} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Es ergibt sich die vollständige dritte Hierarchiestufe:

$N_{0,0}(2) = 0$ $N_{1,0}(2) = 0$ $N_{2,0}(2) = 1$ $N_{3,0}(2) = 0$ $N_{4,0}(2) = 0$

$N_{0,1}(2) = 0$ $N_{1,1}(2) = 1$ $N_{2,1}(2) = 0$ $N_{3,1}(2) = 0$

$N_{0,2}(2) = \frac{1}{2}$ $N_{1,2}(2) = \frac{1}{2}$ $N_{2,2}(2) = 0$

Lösung (7)

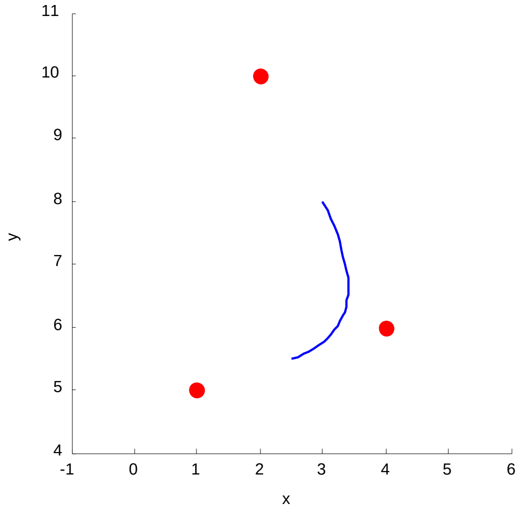
Um den Startpunkt P der Kurve zu ermitteln, muss nun noch in die Gleichung einer B-Spline-Kurve eingesetzt werden:

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot N_{i,k}(t)$$

$$p(2) = \sum_{i=0}^{2} v_i \cdot N_{i,2}(2)$$

$$p(2) = v_0 \cdot N_{0,2}(2) + v_1 \cdot N_{1,2}(2) + v_2 \cdot N_{2,2}(2)$$

$$p(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot {}^1\!/_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot {}^1\!/_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot 0 = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}$$



*D.h. für jedes t im Definitionsbereich ergibt sich ein Punkt auf der B-Spline-Kurve als eine Linearkombination **aller** Stützpunkte mit Gewichtsfaktoren die sich aus der B-Spline-Basisfunktion an der entsprechenden Stelle t ergeben.*

Übungsaufgaben

Modelltransformationen

1. Drücken Sie die folgenden affinen 3D Transformationen durch jeweils eine entsprechende homogene 4×4 Matrix aus:
   - Rotation um $90°$um die X-Achse
   - Translation um den Vektor $(0,5,0)$
2. Bestimmen Sie die zusammengesetzte Transformationsmatrix wie sie entstehen würde, wenn im Programmcode zunächst die Rotation, dann die Translation ausgeführt wird.
3. Transformieren Sie den Punkt $v = (1,0,0)$ mit der zusammengesetzten Matrix.
4. Welche Matrix und welcher Punkt ergibt sich, wenn die beiden Transformationen umgekehrt ausgeführt werden?

Lösung

1. **Drücken Sie die folgenden affinen 3D Transformationen durch jeweils eine entsprechende homogene 4×4 Matrix aus:**
   - Rotation um 90° um die X-Achse
   - Translation um den Vektor $(0,5,0)$

Rotation 90° um x-Achse: $\alpha = 90°$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90°) & -\sin(90°) & 0 \\ 0 & \sin(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

Translation um den Vektor $(0,5,0)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

Lösung (2)

2. Bestimmen Sie die zusammengesetzte Transformationsmatrix wie sie entstehen würde, wenn im Programmcode zunächst die Rotation, dann die Translation ausgeführt wird.

Die Gesamtmatrix setzt sich durch Rechtsmultiplikation von $\boldsymbol{T}$ an $\boldsymbol{R}$ zusammen:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Transformieren Sie den Punkt $\boldsymbol{v = (1, 0, 0)}$ mit der zusammengesetzten Matrix.

Erweiterung auf homogene Koordinaten und Rechtsmultiplikation des Vektors an die Matrix M

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung (3)

4. Welche Matrix und welcher Punkt ergibt sich, wenn die beiden Transformationen umgekehrt ausgeführt werden?

Die Gesamtmatrix setzt sich durch Rechtsmultiplikation von $\boldsymbol{R}$ an $\boldsymbol{T}$ zusammen:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Erweiterung auf homogene Koordinaten und Rechtsmultiplikation des Vektors an die Matrix $\boldsymbol{M}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$