Übungsaufgaben

Projektionstransformation

Nach Modelltransformation und Augpunkttransformation liegt ein Polygon wie folgt vor: $v_0 = (1\ /\ -1\ /\ -2{,}5)$, $v_1 = (-2\ /\ 2{,}5\ /\ -3)$, $v_2 = (-1\ /\ 4\ /\ -3)$. Mit `gluPerspective` ist eine perspektivische Projektion mit folgenden Parametern definiert: $\alpha = 90°$, $\text{aspect} = 1$. Der Abstand vom Augpunkt zur near clipping plane beträgt 2, der Abstand zur far clipping plane beträgt 4.

1. Berechnen Sie left, right, top, bottom.
2. Geben Sie die Projektionsmatrix für eine perspektivische Projektion mit den gegebenen Werten an.
3. Welche kartesischen Koordinaten haben die Vertices nach einer Projektion mit den gegebenen Werten?
4. Welche Vertices liegen innerhalb des Darstellungsbereichs?
5. Fertigen Sie eine Skizze des Darstellungsbereichs an und zeichnen Sie das projizierte Dreieck ein.
6. Führen Sie gegebenenfalls ein Clipping des projizierten Dreiecks am Darstellungsbereich durch. Welche Schnittpunkte mit dem Darstellungsbereich entstehen? *(Kapitel 5)*
7. Führen Sie eine Normalisierung der Koordinaten auf den Wertebereich $[-1\ 1]$ durch. Wie sieht die Normierungsmatrix aus?

Lösung

1. Berechnen Sie left, right, top, bottom.

β lässt sich aus α und *aspect* berechnen: $aspect = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \beta = aspect \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha = 90°$

$$left = -near \cdot \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = -2 \cdot \tan(45°) = -2$$

$$right = near \cdot \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = 2 \cdot \tan(45°) = 2$$

$$bottom = -near \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -2 \cdot \tan(45°) = -2$$

$$top = near \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cdot \tan(45°) = 2$$

2. Geben Sie die Projektionsmatrix für eine perspektivische Projektion mit den gegebenen Werten an.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{far}{near} & far \\ 0 & 0 & -\frac{1}{near} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung (2)

3. Welche kartesischen Koordinaten haben die Vertices nach einer Projektion mit den gegebenen Werten?

$$v_0{}' = \mathbf{P} \cdot v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3{,}5 \\ 1{,}25 \end{pmatrix}$$

Errechnen der kartesischen Koordinaten durch Divisionen durch den inversen Streckungsfaktor *w*:

$$v_0{}'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{1{,}25} \\ \frac{-1}{1{,}25} \\ \frac{-3{,}5}{1{,}25} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}8 \\ -2{,}8 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_0{}'' = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}8 \\ -2{,}8 \end{pmatrix}$$

Analog ergeben sich:

$$v_1{}'' = \begin{pmatrix} -1{,}33 \\ 1{,}67 \\ -3{,}33 \end{pmatrix} \qquad v_2{}'' = \begin{pmatrix} -0{,}67 \\ 2{,}67 \\ -3{,}33 \end{pmatrix}$$

Lösung (3)

4. Welche Vertices liegen innerhalb des Darstellungsbereichs?

Der Darstellungsbereich ist die near clipping plane, auf die die Szene projiziert wird. Nach der Projektion liegen alle Punkte in dieser Ebene, die z-Koordinate wird ignoriert bzw. nur für spätere Berechnungen weiterhin mitgeführt. Es muss also getestet werden ob die x- und y-Koordinate der projizierten Vertices zwischen [left right] bzw [bottom top] liegen.

v_0'': $left \leq v_{0,x}'' \leq right$ und $bottom \leq v_{0,y}'' \leq top$

→ v_0 liegt im Darstellungsbereich

v_1'': $left \leq v_{1,x}'' \leq right$ und $bottom \leq v_{1,y}'' \leq top$

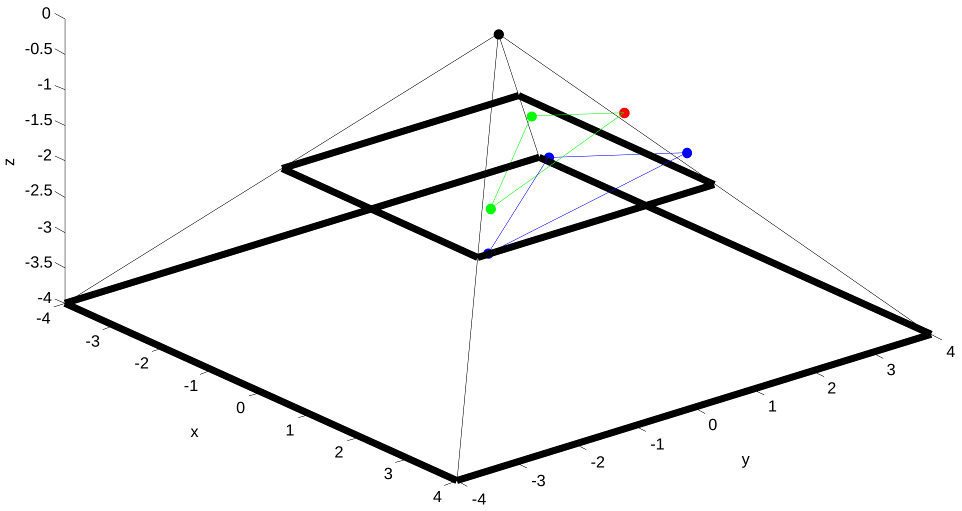
→ v_1 liegt im Darstellungsbereich

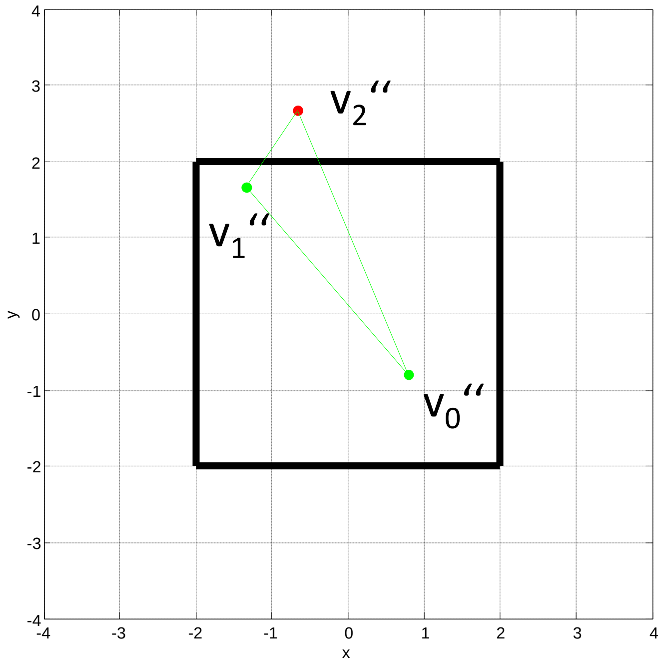
v_2'': $left \leq v_{2,x}'' \leq right$ und $v_{2,y}'' \geq top$

→ v_2 liegt nicht im Darstellungsbereich

Lösung (4)

5. Fertigen Sie eine Skizze des Darstellungsbereichs an und zeichnen Sie das projizierte Dreieck ein.





Lösung (5)

6. Führen Sie gegebenenfalls ein Clipping des projizierten Dreiecks am Darstellungsbereich durch. Welche Schnittpunkte mit dem Darstellungsbereich entstehen?

Anhand der Skizze kann abgelesen werden, dass die Kanten v_1“ $\rightarrow$ v_2“ und v_0“ $\rightarrow$ v_2“ den Darstellungsbereich an der Kante top schneiden. Dadurch ist die y-Koordinate der Schnittpunkte bereits bekannt: $s_{1,y} = 2$, $s_{2,y} = 2$. Die x-Koordinate lässt sich berechnen durch

$$s_x = v_{1,x} + \frac{s_y - v_{1,y}}{v_{2,y} - v_{1,y}}(v_{2,x} - v_{1,x})$$

Somit ergeben sich die folgenden Schnittpunkte (der einfacheren Schreibweise halber sei $v_1 = v_1$“ usw.):

$$s_{1,x} = v_{1,x} + \frac{s_{1,y} - v_{1,y}}{v_{2,y} - v_{1,y}}\left(v_{2,x} - v_{1,x}\right) = -1{,}33 + \frac{2 - 1{,}67}{2{,}67 - 1{,}67}(-0{,}67 + 1{,}33) = -1{,}11$$

$$s_{2,x} = v_{0,x} + \frac{s_{2,y} - v_{0,y}}{v_{2,y} - v_{0,y}}\left(v_{2,x} - v_{0,x}\right) = 0{,}8 + \frac{2 + 0{,}8}{2{,}67 + 0{,}8}(-0{,}67 - 0{,}8) = -0.39$$

Die Schnittpunkte sind damit $s_1 = (-1{,}11\ /\ 2)$ und $s_2 = (-0{,}39\ /\ 2)$

Lösung (6)

7. Führen Sie eine Normalisierung der Koordinaten auf den Wertebereich $[-\mathbf{1}\ \mathbf{1}]$ durch. Wie sieht die Normierungsmatrix aus?

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \frac{2}{right-left} & 0 & 0 & -\frac{right+left}{right-left} \\ 0 & \frac{2}{top-bottom} & 0 & -\frac{top+bottom}{top-bottom} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{far-near} & -\frac{far+near}{far-near} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v''_{0,\,norm} = \mathbf{N} \cdot v''_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}8 \\ -2{,}8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}4 \\ -0{,}2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Analog ergeben sich

$$v''_{1,\,norm} = \begin{pmatrix} -0{,}67 \\ 0{,}83 \\ 0{,}33 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v''_{2,\,norm} = \begin{pmatrix} -0{,}33 \\ 1{,}33 \\ 0{,}33 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie mit dem Bresenham (Midpoint-Line)-Algorithmus eine Linie vom Punkt $v_0 = (2, 1)$ zum Punkt $v_1 = (10, 4)$. Wie sehen die d-Werte der Entscheidungsvariablen aus? Skizzieren Sie die eingefärbten Pixel in einem Koordinatensystem.

2. Erstellen Sie die gleiche Linie noch einmal mit dem Doppelschritt-Verfahren.

a) Auf welche Muster kann das Abprüfen eingeschränkt werden?

b) Welche Werte ergeben sich für die Entscheidungsvariable d?

3. Berechnen Sie mit dem Bresenham (Midpoint Circle)-Algorithmus einen Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius $R = 10$.

a) Welche Werte für die Entscheidungsvariable ergeben sich?

b) Skizzieren Sie den Kreis in einem Koordinatensystem und geben Sie die eingefärbten Pixel an

Lösung

1. Berechnen Sie mit dem Bresenham (Midpoint-Line)-Algorithmus eine Linie vom Punkt $\boldsymbol{v_0} = (\mathbf{2}, \mathbf{1})$ zum Punkt $\boldsymbol{v_1} = (\mathbf{10}, \mathbf{4})$. Wie sehen die $\boldsymbol{d}$-Werte der Entscheidungsvariablen aus? Skizzieren Sie die eingefärbten Pixel in einem Koordinatensystem

Vorberechnungen (Ganzzahl-Bresenham)

- $\Delta x = v_{1,x} - v_{0,x} = 10 - 2 = \mathbf{8}$
- $\Delta y = v_{1,y} - v_{0,y} = 4 - 1 = \mathbf{3}$
- Inkremente der Entscheidungsvariablen:
  - Bei Wahl E: $inc_E = 2\Delta y = 6$
  - Bei Wahl NE: $inc_{NE} = 2(\Delta y - \Delta x) = 2(3 - 8) = -10$

Initialisierungsschritt ($x = v_{0,x} = 2, y = v_{0,y} = 1$)

- $d_0 = 2\Delta y - \Delta x = 3 \cdot 2 - 8 = \mathbf{-2}$ da $d_0 \leq 0 \;\Rightarrow\; E$

Lösung (2)

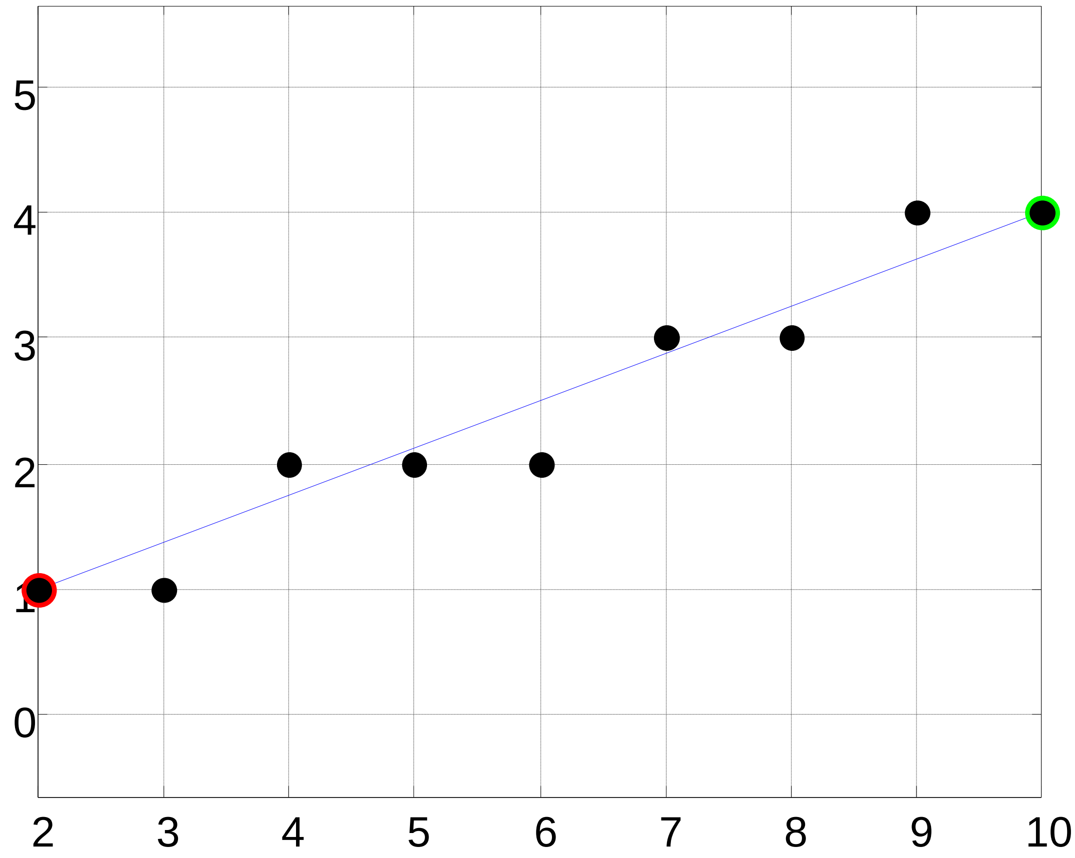
Iterationen

Neues x	**Neues** y	d	*Entscheidung für nächsten Schritt*
3	1	$d_1 = d_0 + inc_E = -2 + 6 = \mathbf{4}$	da $d_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{NE}$
4	2	$d_2 = d_1 + inc_{NE} = 4 - 10 = \mathbf{-6}$	da $d_2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}$
5	2	$d_3 = d_2 + inc_E = -6 + 6 = \mathbf{0}$	da $d_3 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}$
6	2	$d_4 = d_3 + inc_E = 0 + 6 = \mathbf{6}$	da $d_4 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{NE}$
7	3	$d_5 = d_4 + inc_{NE} = 6 - 10 = \mathbf{-4}$	da $d_5 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}$
8	3	$d_6 = d_5 + inc_E = -4 + 6 = \mathbf{2}$	da $d_6 > 0 \quad \Rightarrow \mathrm{NE}$
9	4	$d_7 = d_6 + inc_{NE} = 2 - 10 = \mathbf{-8}$	da $d_7 \leq 0 \quad \Rightarrow \mathrm{E}$
10	4	While-Bedingung $x < v_{1,x}$ nicht mehr erfüllt → Ende.	

Lösung (3)

Gefärbte Punkte

$$
\begin{aligned}
d_0 &= -2.0 \\
d_1 &= \ \ 4.0 \\
d_2 &= -6.0 \\
d_3 &= \ \ 0.0 \\
d_4 &= \ \ 6.0 \\
d_5 &= -4.0 \\
d_6 &= \ \ 2.0 \\
d_7 &= -8.0
\end{aligned}
$$



Lösung (4)

2. Erstellen Sie die gleiche Linie noch einmal mit dem Doppelschritt-Verfahren.

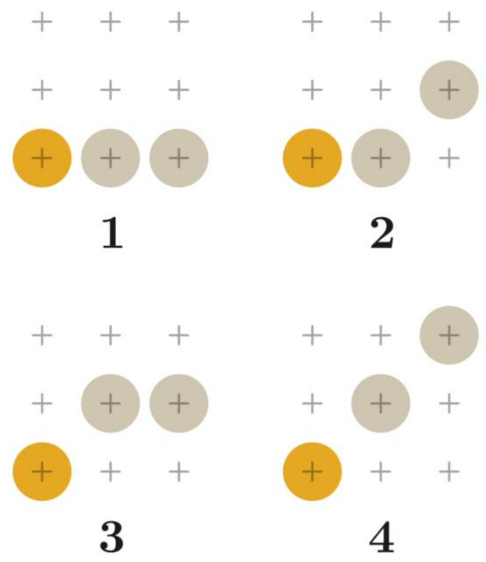
a) Auf welche Muster kann das Abprüfen eingeschränkt werden?

Da die Steigung $<$ ½ ist, reicht es die Muster 1, 2, 3 abzuprüfen. ($m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{8} = 0{,}375$)

b) Welche Werte ergeben sich für die Entscheidungsvariable d?

Vorberechnungen:

- $\Delta x = v_{1,x} - v_{0,x} = 10 - 2 = \mathbf{8}$
- $\Delta y = v_{1,y} - v_{0,y} = 4 - 1 = \mathbf{3}$
- Inkremente der Entscheidungsvariablen:
  - Bei Wahl Pattern 1: $inc_{P1} = 4\Delta y = \mathbf{12}$
  - Bei Wahl Pattern 2 oder 3: $inc_{P23} = 4\Delta y - 2\Delta x = \mathbf{-4}$
- Prüf-Kondition für Pattern 2 und 3:
  - $cond = 2\Delta y = \mathbf{6}$



Lösung (5)

Initialisierungsschritt ($x = v_{0,x} = 2, y = v_{0,y} = 1$)

- $d_0 = 4\Delta y - \Delta x = 4 \cdot 3 - 8 = \mathbf{4}$ da $d_0 > 0 \;\; \Rightarrow$ Pattern 2 oder 3, Kondition prüfen
- $d_0 < cond$ $(4 < 6) \Rightarrow$ Zeichnen von Pattern 2

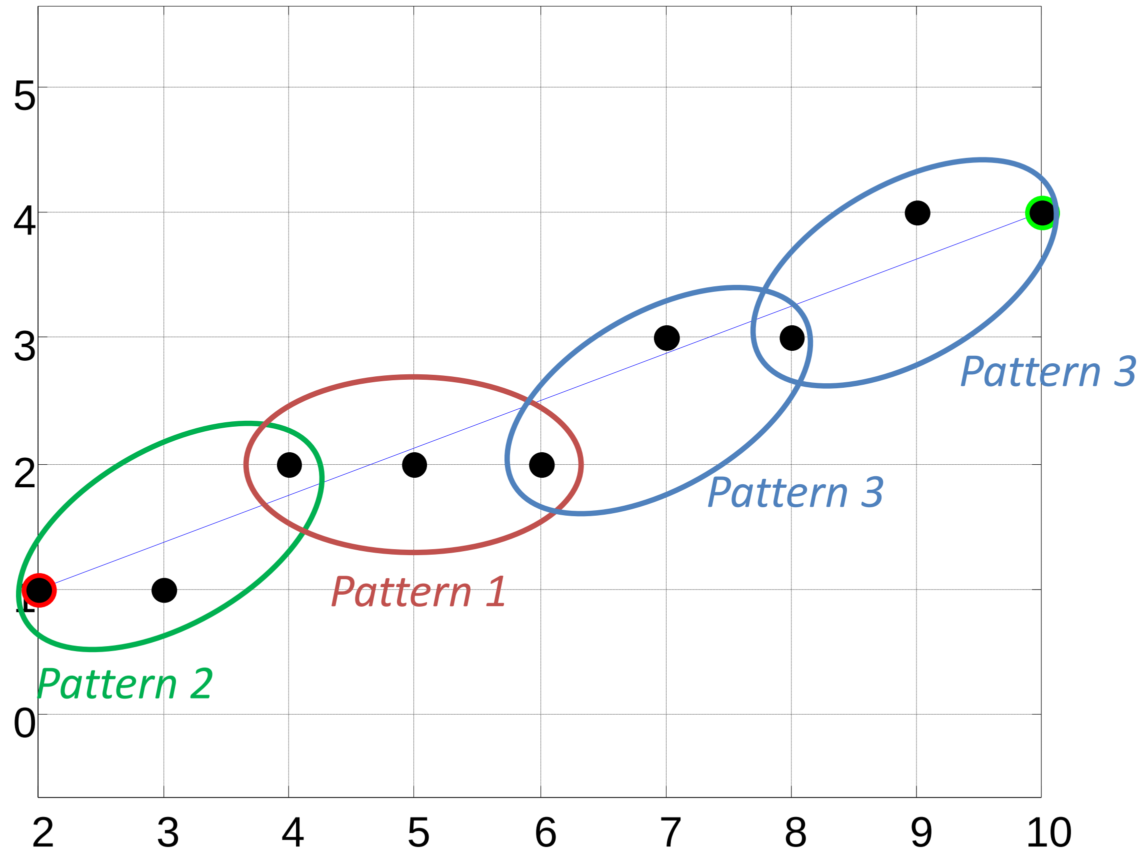
Iterationen

x	y	d	*Entscheidung für nächsten Schritt*
4	2	$d_1 = d_0 + inc_{P23} = 4 - 4 = \mathbf{0}$	da $d_1 \leq 0 \;\; \Rightarrow$ Pattern 1 zeichnen
6	2	$d_2 = d_1 + inc_{P1} = 0 + 12 = \mathbf{12}$	da $d_2 > 0 \;\; \Rightarrow cond$ prüfen. da $d_2 > cond \;\; \Rightarrow$ Pattern 3 zeichnen
8	3	$d_3 = d_2 + inc_{P23} = 12 - 4 = \mathbf{8}$	da $d_3 > 0 \;\; \Rightarrow cond$ prüfen. da $d_3 > cond \;\; \Rightarrow$ Pattern 3 zeichnen
10	4	While-Bedingung $x < v_{1,x}$ nicht mehr erfüllt → Ende.	

Lösung (6)

Skizze:

$$d_0 = 4.0$$
$$d_1 = 0.0$$
$$d_2 = 12.0$$
$$d_3 = 8.0$$



Lösung (7)

3. Berechnen Sie mit dem Bresenham (Midpoint Circle)-Algorithmus einen Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius $R = 10$.

a) Welche Werte für die Entscheidungsvariable ergeben sich?

b) Skizzieren Sie den Kreis in einem Koordinatensystem und geben Sie die eingefärbten Pixel an

Das Zeichnen beginnt bei 12 Uhr, d.h. ($x = 0, y = R = 10$).

Im zweiten Oktant wird daher Pixel $(0,10)$ eingefärbt. Nutzt man die Symmetrieüberlegungen aus, so werden zusätzlich die folgenden Pixel gefärbt:

$(y, x) \quad = (10,0)$

$(y, -x) \quad = (10,0)$

$(x, -y) \quad = (0, -10)$

$(-x, -y) \quad = (0, -10)$

$(-y, -x) \quad = (-10,0)$

$(-y, x) \quad = (-10, 0)$

$(-x, y) \quad = (0,10)$

Lösung (8)

Initialisierungsschritt:

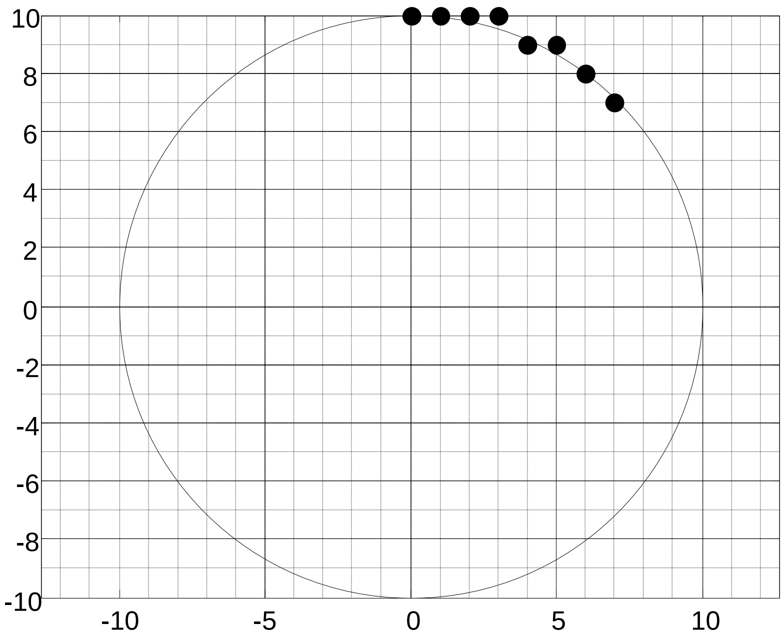
- $d_0 = \frac{5}{4} - R = \mathbf{-8,75.}$ da $d_0 < 0 \;\Rightarrow\; E$

Iterationen

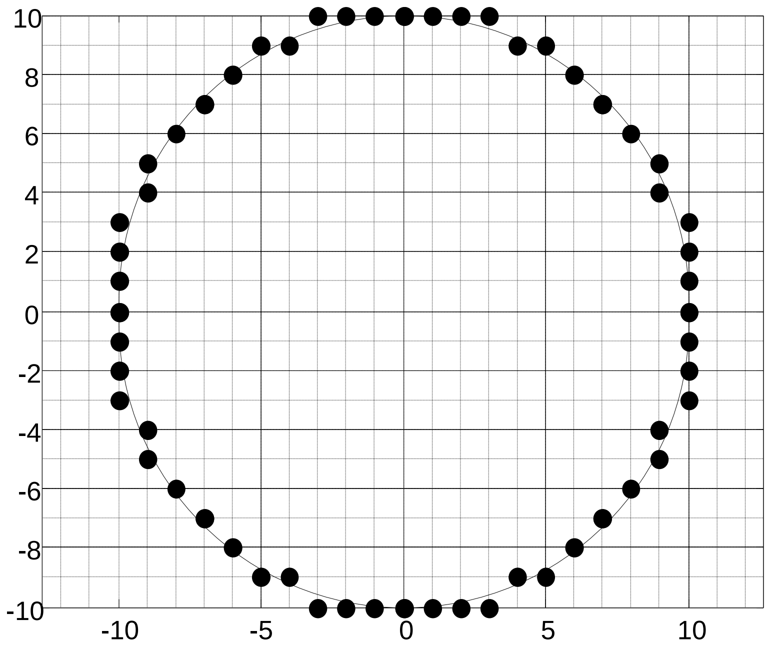
x	y	d	***neues*** x	***neues*** y	*Entscheidung für nächsten Schritt*
0	10	$d_1 = d_0 + 2x + 3 = -8{,}75 + 2 \cdot 0 + 3 = -5{,}75$	1	10	da $d_1 < 0 \;\Rightarrow\;$ E
1	10	$d_2 = d_1 + 2x + 3 = -5{,}75 + 2 \cdot 1 + 3 = -0{,}75$	2	10	da $d_2 < 0 \;\Rightarrow\;$ E
2	10	$d_3 = d_2 + 2x + 3 = -0{,}75 + 2 \cdot 2 + 3 = 6{,}25$	3	10	da $d_3 \geq 0 \;\Rightarrow\;$ SE
3	10	$d_4 = d_3 + 2(x - y) + 5 = 6{,}25 + 2(3 - 10) + 5 = -2{,}75$	4	9	da $d_4 < 0 \;\Rightarrow\;$ E
4	9	$d_5 = d_4 + 2x + 3 = -2{,}75 + 2 \cdot 4 + 3 = 8{,}25$	5	9	da $d_5 \geq 0 \;\Rightarrow\;$ SE
5	9	$d_6 = d_5 + 2(x - y) + 5 = 8{,}25 + 2(5 - 9) + 5 = 5{,}25$	6	8	da $d_6 \geq 0 \;\Rightarrow\;$ SE
6	8	$d_7 = d_6 + 2(x - y) + 5 = 5{,}25 + 2(6 - 8) + 5 = 6{,}25$	7	7	da $d_7 \geq 0 \;\Rightarrow\;$ SE
7	7	While-Bedingung $y > x$ nicht mehr erfüllt → Ende.			

Lösung (9)

Skizzen



2. Oktant



Gesamter Kreis aus Symmetrieüberlegung